

# Über die Modulfigur

Rieger, Georg Johann

Veröffentlicht in:  
Abhandlungen der Braunschweigischen  
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 44, 1993,  
S.29-35



Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

## Über die Modulfigur

Von **Georg Johann Rieger**<sup>\*</sup>, Hannover

(Eingegangen am 27. 06. 1993)

### Zusammenfassung:

Die Modulfigur kommt ansatzweise erstmals bei Gauß vor (vgl. Werke III, 477–478 und VIII, 104). Sie besteht aus unendlich vielen Kreisbogendreiecken der oberen Halbebene. Wegen der 1-Periodizität darf der Realteil auf  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  eingeschränkt werden. Die Anzahl der verbleibenden Kreisbogendreiecke, die von einer beliebigen Parallelen zur reellen Achse getroffen werden, ist endlich und geht bei Annäherung dieser Parallelen von oben an die reelle Achse offenbar monoton gegen Unendlich; dafür beweisen wir eine asymptotische Formel (Satz 1).

Wir beginnen mit der erweiterten komplexen Ebene  $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  und der abgeschlossenen oberen Halbebene  $H := \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ . Es bezeichne  $\Gamma$  („Modulgruppe“) die Menge aller Matrizen  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  mit  $a, b, c, d$  aus  $\mathbb{Z}$  und  $ad - bc = 1$ . Für  $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$  sei  $T(z) := \frac{az + b}{cz + d}$ ;  $\operatorname{Im}$  bedeutet Imaginärteil; es ist

$$(1) \quad \operatorname{Im} T(z) = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz + d|^2}.$$

Für  $T \in \Gamma$  ist  $T \neq -T$ ; für  $T \in \Gamma, S \in \Gamma$  gilt  $T(z) = S(z) (z \in \mathbb{C}) \Leftrightarrow T = \pm S$ ; bei jeder Abbildung  $z \rightarrow T(z)$  wird daher  $T$  normiert gemäß

$$(2) \quad \begin{cases} d > 0 & \text{falls } c = 0 \text{ (und daher } d = 1), \\ c > 0 & \text{falls } c \geq 0. \end{cases}$$

Es bezeichne  $\Gamma'$  die Menge der  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$  mit (2). Man hat  $(T \in \Gamma, S \in \Gamma) \Rightarrow TS \in \Gamma$ ; gelegentlich hat man aber  $T \in \Gamma', S \in \Gamma', TS \notin \Gamma'$  wie etwa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

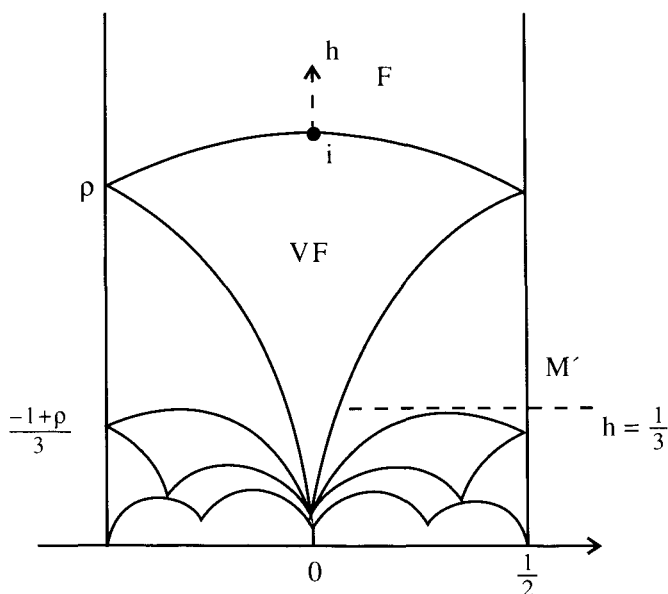
$\operatorname{Re}$  bedeutet Realteil. Es sei  $i := \sqrt{-1}$ ,  $\rho := -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ,  $I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

$P := \{z \in H : -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2}\}$ ,  $F := \{z \in P : |z| \geq 1\}$  („Fundamentalebene“).

---

<sup>\*</sup> Univ.-Prof. Dr. G. J. Rieger · Dorfstraße 33 · 31275 Steinwedel

$M := \{TF; T \in \Gamma'\}$  („Modulfigur“) ist eine einfache Überdeckung von  $H$  bis auf eine Ausnahmemenge vom Maß 0. Vermöge  $z \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (z) = z + 1$  wird  $M$  auf sich abgebildet; zur Untersuchung von  $M$  kann man sich daher auf  $M' := M \cap P$  beschränken. Mit  $F$  ist auch  $TF$  ein Kreisbogendreieck mit den Winkeln  $\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}$ . Der Rand von  $F \cup \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} F \cup \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} F$  enthält  $\left\{\frac{1}{2} + ti; t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\right\}$  mit Unterteilung bei  $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$  und  $t = \frac{\sqrt{3}}{6}$ ; daher liegt das Innere jedes  $TF$  entweder ganz innerhalb oder ganz außerhalb von  $P^*$ ).



Figur 1

Für  $h \in \mathbb{R}_{>0}$  sei  $\gamma(h) := \{t + hi; t \in \mathbb{R}\}$ . Aus  $TF \cap \gamma(h) \neq \emptyset$  folgt  $|cd| \leq \frac{1}{h}$ ; denn: für  $z = x + yi \in F$  gilt

$2|x| \leq 1 \leq |z|$  und  $|cz + d|^2 = (cx + d)^2 + c^2y^2 \geq c^2|z|^2 - |cdz| + d^2 \geq |cdz|$ , und wir beachten

\*) Viele Lehrbücher behandeln die Modulgruppe und die Modulfigur. Wir erwähnen nur [1], [2], [3].

noch (1),  $\operatorname{Im} z \leq |z|$  und  $h = \operatorname{Im} T(z)$ . Es sei  $TF \subset P$ ,  $T \neq I$ ; wegen  $\infty \in F$ ,  $T(\infty) = \frac{a}{c}$  ist  $|\frac{a}{c}| \leq \frac{1}{2}$  und

$$(3) \quad TF \cap \gamma(h) \neq \emptyset \Rightarrow TF \cap \gamma(h') \neq \emptyset \quad (0 < h' < h).$$

Also ist  $\alpha(h) = \operatorname{card} \{T \in \Gamma': TF \subset P \wedge TF \cap \gamma(h) \neq \emptyset\}$  endlich und zunehmend für abnehmendes  $h$ . Wir studieren  $\alpha(h)$  für  $h$  gegen 0 (Satz 1).

**Beispiel:** Nach Fig. 1 ist  $\alpha(h) = 3$  für  $\frac{\sqrt{3}}{2} > h > \frac{1}{3}$  und  $\alpha(h) = 5$  für  $\frac{1}{3} > h > \frac{\sqrt{3}}{6}$ .

Für  $A \subset \overline{\mathbb{C}}$ ,  $A \neq \emptyset$  sei  $\operatorname{Im} A := \{\operatorname{Im} z : z \in A\}$  und  $\lambda(A) := \sup(\operatorname{Im} A)$ . Nach (3) ist  $\operatorname{Im} TF = \{y : 0 \leq y \leq \lambda(TF)\}$  ( $c \neq 0$ ).

Für jedes geordnete Paar  $c, d$  aus  $\mathbb{Z}$  mit  $c > 2$ ,  $(c, d) = 1$  gibt es genau ein geordnetes Paar  $a = a(c, d)$ ,  $b = b(c, d)$  aus  $\mathbb{Z}$  mit  $ad - bc = 1$ ,  $-\frac{c}{2} < a < \frac{c}{2}$ ; es sei

$$\begin{aligned} T(c; d) &:= \begin{pmatrix} a(c, d) & b(c, d) \\ c & d \end{pmatrix} \quad (c > 2, (c, d) = 1), \\ T(2; d) &:= \begin{pmatrix} \operatorname{sgn} d & \frac{|d|-1}{2} \\ 2 & d \end{pmatrix} \quad ((2, d) = 1), \\ T(1; d) &:= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Hilfssatz 1:** Für jedes  $T \in \Gamma'$ ,  $T \neq I$  mit  $TF \subset P$  gibt es genau ein geordnetes Paar  $c, d$  aus  $\mathbb{Z}$  mit  $c > 0$ ,  $(c, d) = 1$ ,  $T = T(c; d)$ .

**Beweis:** Für  $c > 2$  und für  $c = 1$  beachten wir  $T(\infty) = \frac{a}{c}$ . Für  $c = 2$  beachten wir

$$\operatorname{Re} T(i) = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{|d|}{4 + d^2}\right) \operatorname{sgn} d \begin{cases} < \frac{1}{2}, \\ > -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Für  $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  sei  $T^* := \begin{pmatrix} -a & b \\ c & -d \end{pmatrix}$ ; ferner sei  $V := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Es ist  $T^{**} = T$ ,  $V^* = V$ .

Für  $h < \frac{\sqrt{3}}{2}$  wird  $T = V$ , aber nicht  $T = I$  bei  $\alpha(h)$  gezählt. Bei gezählten  $T$  ist  $c > 0$  und, abgesehen von  $T = V$ , noch  $d \neq 0$ . Es bezeichne  $\sigma$  die Spiegelung von  $\mathbb{C}$  an  $\operatorname{Re} z = 0$ . Für die Ecken  $\rho, \infty, 1 + \rho$  von  $F$  findet man  $\sigma T(\rho) = T^*(1 + \rho)$ ,  $\sigma T(\infty) = T^*(\infty)$ ,  $\sigma T(1 + \rho) = T^*(\rho)$  und folglich  $\sigma TF = T^*F$ . Für  $T \in \Gamma \setminus \{I, V\}$  hat  $TF \cap T^*F$  keine inneren Punkte (vgl. Fig. 1). Wir können also weiter normieren gemäß  $d > 0$ ; es sei:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &:= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : c > 0 \wedge d > 0 \right\}, \\ \Gamma_0(h) &:= \{T \in \Gamma_0 : TF \subset P \wedge TF \cap \gamma(h) \neq \emptyset\}, \quad \alpha_0(h) := \operatorname{card} \Gamma_0(h); \end{aligned}$$

es ist

$$\alpha(h) = 1 + 2\alpha_0(h) \quad (0 < h < \frac{\sqrt{3}}{2}).$$

Aus Hilfssatz 1 folgt sofort

**Hilfssatz 2:** Für jedes  $T \in \Gamma_0$  mit  $TF \subset P$  gibt es genau ein geordnetes Paar  $c, d$  aus  $\mathbb{Z}$  mit  $c > 0, d > 0, (c, d) = 1, T = T(c; d)$ .

Das Kreisbogendreieck  $F$  hat die Seiten  $L_+ := \left\{ \pm \frac{1}{2} + ti : \frac{\sqrt{3}}{2} \leq t \leq \infty \right\}$ ,  
 $L_0 := \left\{ e^{\varphi i} : \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} \right\}$ ; es sei  $L := L_- \cup L_0 \cup L_+$ . Man hat  $\text{Im } TF = \text{Im } TL$ ,  $\lambda(TF) = \lambda(TL)$ ,  $TF \cap \gamma(h) \neq \emptyset \Leftrightarrow h \leq \lambda(TL)$ . Dann gibt Hilfssatz 2 sofort

**Hilfssatz 3:** Für  $0 < h < \frac{\sqrt{3}}{2}$  ist  $\alpha_0(h) = \text{card} \{ c > 0, d > 0 : (c, d) = 1 \wedge \lambda(T(c; d)L) \geq h \}$ .

Es ist  $\text{Im } T\left(\mp \frac{1}{2} + ti\right) = \frac{t}{\left(\frac{c}{2} \mp d\right)^2 + c^2 t^2}$  und folglich  $\text{Im } TL_+ \subset \text{Im } TL_-$  ( $T \in \Gamma_0$ ). Das  
ergibt  $\lambda(TF) = \max(\lambda(TL_-), \lambda(TL_0))$  ( $T \in \Gamma_0$ ). Das Maximum von  $\frac{t}{\left(\frac{c}{2} - d\right)^2 + c^2 t^2}$  für  
 $t \geq 0$  ist bei  $t = t_0 := \left| \frac{d}{c} - \frac{1}{2} \right|$ ; mit  $t_1 := \max\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, t_0\right)$  kommt  $\lambda(TL_-) = \frac{t_1}{\left(\frac{c}{2} - d\right)^2 + c^2 t_1^2}$

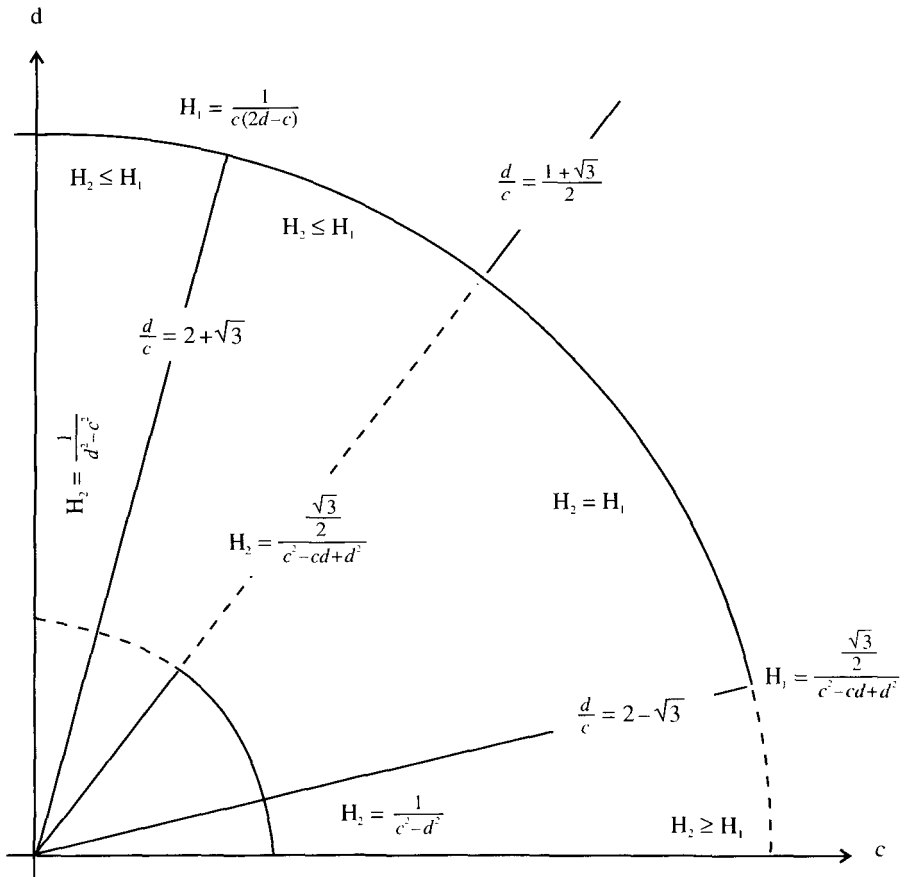
und daher

$$\lambda_- := \lambda(TL_-) = \begin{cases} \frac{1}{c(2d - c)} & \text{falls } \frac{d}{c} \geq \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \\ \frac{\sqrt{3}}{2(c^2 - cd + d^2)} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nun ist  $\text{Im } T e^{\varphi i} = \frac{\sin \varphi}{c^2 + 2cd \cos \varphi + d^2}$ ; das Maximum der rechten Seite für  $0 \leq \varphi \leq \pi$   
ist bei  $\varphi = \varphi_0$ ,  $\cos \varphi_0 = \frac{-2cd}{c^2 + d^2}$  und daher  $\sin \varphi_0 = \frac{|c^2 - d^2|}{c^2 + d^2}$ ; insbesondere hat man  
 $\frac{\pi}{2} < \varphi_0 \leq \pi$ ; mit  $\varphi_1 := \min\left(\frac{2\pi}{3}, \varphi_0\right)$  kommt  $\lambda(TL_0) = \frac{\sin \varphi_1}{c^2 + 2cd \cos \varphi_1 + d^2}$ ; nun ist  
 $\cos \varphi_1 = \max\left(-\frac{1}{2}, \frac{-2cd}{c^2 + d^2}\right)$ ,  $\sin \varphi_1 = \max\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{|c^2 - d^2|}{c^2 + d^2}\right)$  und daher

$$\lambda_0 := \lambda(TL_0) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2(c^2 - cd + d^2)} & \text{falls } 2 - \sqrt{3} \leq \frac{d}{c} \leq 2 + \sqrt{3}, \\ \frac{1}{|c^2 - d^2|} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Graphisch bedeutet das



Figur 2

Insgesamt haben wir

$$(4) \quad \lambda(TF) = \begin{cases} \frac{1}{c(2d-c)} & \text{falls } \frac{d}{c} \geq \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \\ \frac{\sqrt{3}}{2(c^2-cd+d^2)} & \text{falls } 2-\sqrt{3} \leq \frac{d}{c} \leq \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \\ \frac{1}{c^2-d^2} & \text{falls } \frac{d}{c} \leq 2-\sqrt{3}. \end{cases}$$

Zur Berechnung von  $\alpha_0(h)$  mittels Hilfssatz 3 müssen daher Gitterpunkte gezählt werden in Bereichen, welche durch Strecken, Hyperbelbögen und Ellipsenbögen berandet sind.

Die Beiträge der 3 Fälle von (4) zu  $\alpha_0(h)$  bezeichnen wir von oben nach unten mit  $\alpha_1(h)$ ,  $\alpha_2(h)$ ,  $\alpha_3(h)$ . Es ist  $\alpha_0(h) = \alpha_1(h) + \alpha_2(h) + \alpha_3(h)$ . Im unteren Fall von (4) ist  $\frac{1}{h} \geq c^2 - d^2 \geq (4\sqrt{3} - 6)c^2$  und daher  $c = O(1/\sqrt{h})$ ,  $d = O(1/\sqrt{h})$ ,  $\alpha_3(h) = O(1/h)$ . Im mittleren Fall von (4) ist  $\frac{\sqrt{3}}{2h} \geq c^2 - cd + d^2 = \left(\frac{c}{2} - d\right)^2 + \frac{3}{4}c^2$  und daher  $c = O(1/\sqrt{h})$ ,  $d = O(1/\sqrt{h})$ ,  $\alpha_2(h) = O(1/h)$ . Es folgt

$$(5) \quad \alpha_0(h) = \alpha_1(h) + O(1/h).$$

Es ist

$$\alpha_1(h) = \sum_{c \geq 1} \sum_{\substack{d \geq \frac{1+\sqrt{3}}{2}c \\ (c,d)=1, c(2d-c) \leq \frac{1}{h}}} 1;$$

für die Bedingung  $(c, d) = 1$  schreiben wir den Faktor  $\sum_{\substack{a > 0 \\ a|c, a|d}} \mu(a)$  mit der Möbius-Funktion  $\mu$ ; mit  $c = ax$ ,  $d = ay$  und

$$(6) \quad \beta(t) = \sum_{x \geq 1} \sum_{\substack{y \geq \frac{1+\sqrt{3}}{2}x \\ x(2y-x) \leq t}} 1;$$

ergibt Vertauschen der Summen sofort  $\alpha_1(h) = \sum_{0 < a \leq \frac{1}{\sqrt{h}}} \mu(a) \beta\left(\frac{1}{a^2 h}\right)$ . In (6) ist  $t \geq x(2y-x) \geq x^2 \sqrt{3}$  und daher  $x = O(\sqrt{t})$ ,  $y = O(t)$ ;

$$\rho(t) = \int_{x \geq 1} \int_{\substack{y \geq \frac{1+\sqrt{3}}{2}x \\ x(2y-x) \leq t}} dx dy$$

liefert  $\beta(t) = \rho(t) + O(t)$ ,  $\alpha_1(h) = \sum_{0 < a \leq \frac{1}{\sqrt{h}}} \mu(a) \rho\left(\frac{1}{a^2 h}\right) + O(1/h)$ . Mit der neuen

Variablen  $w = y - \frac{x}{2}$  statt  $y$  kommt

$$\rho(t) := \int_{x \geq 1} \int_{\substack{w \geq \frac{\sqrt{3}}{2} x \\ xw \leq \frac{t}{2}}} dx dw = \frac{1}{2} \log t + O(t).$$

Wegen  $\sum_{a \geq 1} \mu(a) a^{-2} = \frac{1}{\zeta(2)}$  mit der Riemann-Funktion  $\zeta$  ist

$$\begin{aligned} \alpha_1(h) &= \sum_{0 < a \leq \frac{1}{\sqrt{h}}} \mu(a) \left( \frac{1}{2a^2 h} \log \frac{1}{a^2 h} + O\left(\frac{1}{a^2 h}\right) \right) + O\left(\frac{1}{h}\right) \\ (7) \quad &= \frac{1}{2\zeta(2)h} \log \frac{1}{h} + O\left(\frac{1}{h}\right). \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt

**Satz 1:** Für  $0 < h < 1$  ist  $\alpha(h) = \frac{1}{\zeta(2)h} \log \frac{1}{h} + O\left(\frac{1}{h}\right)$ .

Das läßt sich sofort verschärfen; dazu verwenden wir für  $j = 2, 3$  die elementare Abschätzung  $\alpha_j(h) = c_j \frac{1}{h} + O(1/\sqrt{h})$ , die im Fall des Kreises auf Gauß zurückgeht; bei  $\alpha_1(h)$  stützen wir uns auf die neueste Abschätzung beim Dirichlet-Teilerproblem.

## Literatur

- [1] F. Klein und R. Fricke, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen I, II*. Teubner-Verlag, 1890, 1892.
- [2] J. Lehner, *Discontinuous groups and automorphic functions*. American Math. Soc., 1964.
- [3] R. A. Rankin, *Modular forms and functions*. Cambridge U. Press, 1977.